Utilisation du logiciel Cabri 3D de géométrie dans l'espace(*)

Jean-Jacques Dahan(**)

Historiquement, la géométrie dynamique plane trouve ses racines chez les grands géomètres de la tradition française (Clairaut en particulier). C'est pourquoi un outil comme Cabri permet à nos élèves une pratique dynamique des mathématiques en harmonie avec les techniques de ces grands géomètres. À l'opposé, il n'existe pas de culture d'une pratique dynamique de la géométrie spatiale et cela explique pourquoi l'apparition de Cabri 3D, avec ses potentialités voisines de celles de Cabri 2 Plus et son ergonomie, peut changer radicalement la manière d'aborder cette géométrie. L'utilisation d'un tel logiciel s'appuyant sur la perception réaliste du monde qui nous entoure doit aider le Professeur à mieux communiquer dans un domaine où il manquait passablement d'instruments de communication. Il doit aussi donner à l'élève le goût de la création en 3D dans un environnement qui utilise des outils analogues à ceux utilisés dans les jeux vidéo en 3D. Cet article a pour but de montrer à partir de deux exemples bien particuliers qu'il est possible de prendre en main Cabri 3D très rapidement tout en dégageant des modèles d'utilisation en classe qui demandent à être affinés par la pratique. Nous commencerons par une présentation rapide de Cabri 3D.

1. Introduction à Cabri 3D

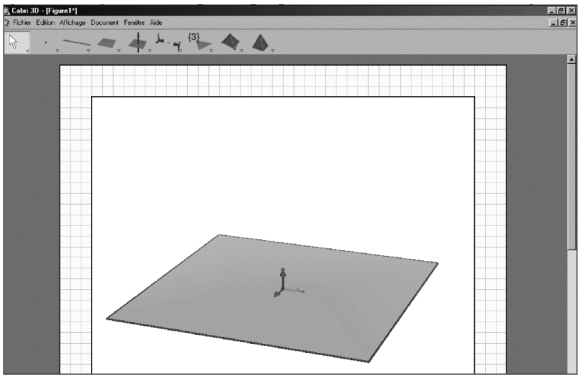
1.1. La page de travail

Quand on ouvre Cabri 3D, on accède à une page où est représentée une portion du plan horizontal avec un repère indiquant les trois directions d'un repère orthonormé. Il est à noter une barre d'outils semblable à celle de Cabri 2 Plus dans sa concision mais assez différente dans son contenu. La perspective est une perspective centrale suivant un angle de vue qui peut être modifié à tout moment par animation de la souris cliquée droit (d'autres perspectives sont possibles en options). Cette animation, qu permet de changer les points de vue, procure une approche non figée des objets de l'espace qui permet de trouver le bon angle de perception.

Un mode d'emploi extrêmement soigné est accessible dans l'aide ; cette aide contient des tutoriels sous turbo démo d'une qualité irréprochable (ce sont des petits films d'animations montrant le pas à pas sur des problèmes classiques : théorème du toit, intersection d'un cube par un plan perpendiculaire à une diagonale de ce cube, …).

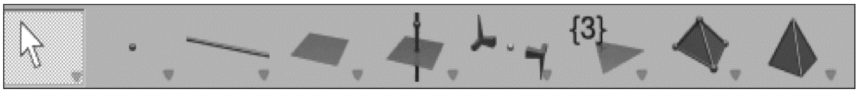
(*) Le contenu de cet article a été présenté comme atelier aux journées de l'APMEP de Caen.

(**) IREM de Toulouse, groupe de Géométrie dynamique, jjdahan@wanadoo.fr

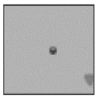
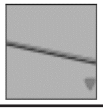
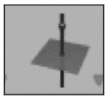


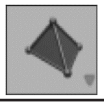
1.2. Les outils disponibles à partir de la barre d'outils

Les outils accessibles le sont à partir de la barre d'outils reproduite ci dessous :



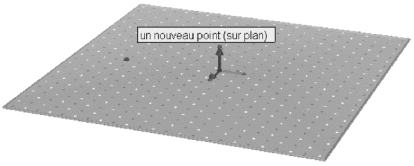
Voici donc les outils respectivement accessibles sous les icônes :

1	2	3	4	5
				
Manipulation Redéfinition	Point Points d'intersection	Droite Segment Demi-droite Vecteur Cercle Conique Courbe d'intersection	Plan Triangle Polygone Demi-plan Secteur Cylindre Cône Sphère	Perpendiculaire Parallèle Plan médiateur Milieu Somme de vecteurs

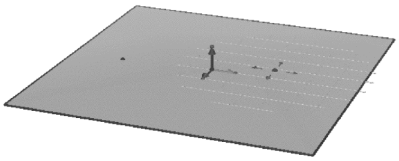
6	7	8	9
			
Symétrie centrale Symétrie axiale Symétrie plane Translation Rotation par axe et points	Triangle équilatéral Carré Pentagone régulier Hexagone régulier Octogone régulier Décagone régulier Dodécagone régulier Pentagramme	Tétraèdre Boîte XYZ Prisme Pyramide Polyèdre convexe Ouverture de polyèdre Découpe de polyèdre	Tétraèdre régulier Cube Octaèdre régulier Dodécaèdre régulier Isocaèdre régulier

1.3. Quelques constructions de base

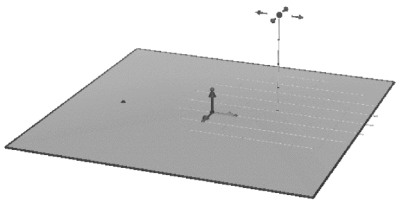
1.3.1. Des points



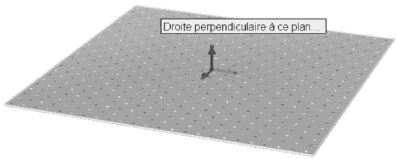
L'outil point permet de créer un point sur le plan horizontal de référence si ce curseur est placé sur le rectangle repérant ce plan (et dans ce cas le point ne peut en sortir sauf par redéfinition).
Le point peut néanmoins être créé dans l'espace à condition d'appuyer sur la touche majuscule avant de cliquer : par défaut le point de l'espace est placé dans le plan
Dans ce cas là, dès qu'on tire sur ce point, on voit apparaître le quadrillage du plan dans le voisinage de notre point et les quatre flèches indiquant les quatre directions de déplacement possibles dans le plan.



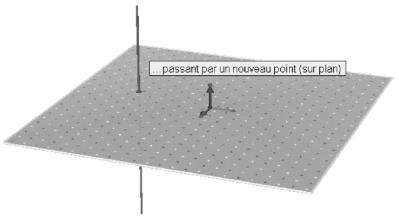
Le point créé dans l'espace peut être déplacé verticalement si on appuie sur la touche majuscule pendant le mouvement de la souris : dans ce cas on voit apparaître la verticale sur laquelle le point se déplace.



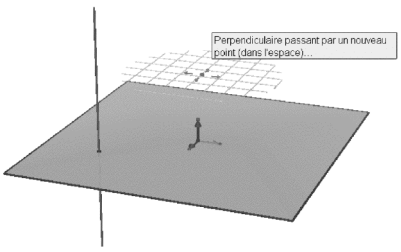
1.3.2. Des droites



Si on utilise l'outil « Perpendiculaire » et qu'on approche le curseur du plan horizontal de référence, celui-ci clignote car il est reconnu par Cabri 3D qui propose une droite perpendiculaire à ce plan.
Il suffit de cliquer pour accepter et dans la foulée Cabri propose de faire passer cette perpendiculaire par un point de ce plan. Il est possible quand on voit apparaître ce qui va être obtenu de tirer sur la souris pour se positionner à l'endroit choisi, cliquer et obtenir la perpendiculaire voulue.



Si on tire sur la souris pour se positionner hors du rectangle représentant le plan horizontal de référence, l'outil « Perpendiculaire » toujours activé, propose le tracé d'une perpendiculaire au plan horizontal à partir cette fois d'un point de l'espace positionné par défaut sur le plan horizontal.



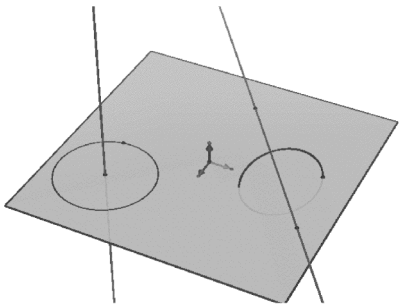
1.3.3. Des cercles et de certains solides de l'espace

1.3.3.1. Cercles

Les cercles peuvent être construits de deux façons distinctes (voir figure de droite) :

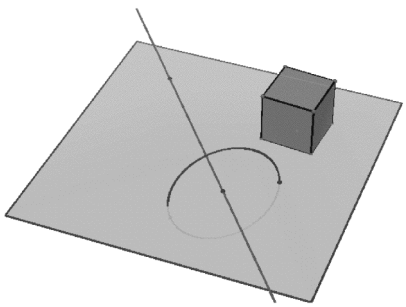
Par une approche plane, en trois temps : on clique sur le plan qui va contenir ce cercle, on clique sur un point de ce plan pour définir le centre et enfin on clique sur un troisième point qui est un point définissant le rayon.

Par une approche spatiale, en deux temps : on clique sur une droite ou un segment autour de laquelle le cercle sera défini puis sur un point du cercle (sur la figure de droite on a créé un cercle autour d'une droite du plan préalablement construite)



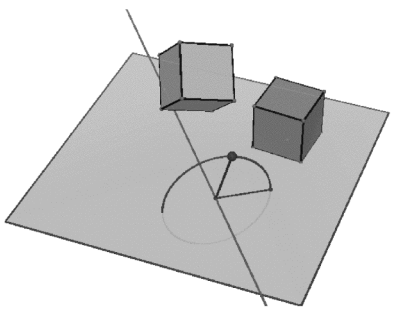
1.3.3.2. Cubes et polyèdres

Un cube est construit en trois temps : choix du plan dans lequel est placé la première face, choix du centre de la face puis choix d'un sommet de cette face. Cette manière de faire est la même pour les autres polyèdres réguliers. Sur la figure de droite, un cube avec une face sur le plan horizontal a été construit suivant cette procédure.



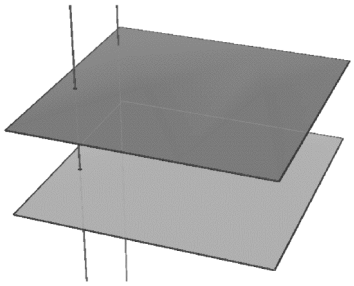
1.3.3.3. Rotations

On peut transformer ce cube par une rotation en cliquant successivement sur l'axe de la rotation, le cube à transformer et deux points homologues de la rotation, c'est-à-dire deux point caractérisant la rotation (Cabri affichera des textes du genre « rotation de ce cube », « autour de cette droite », « déplaçant ce point » (ici le point d'intersection du plan et du cercle visible sur la figure) et enfin « en direction d'un nouveau point (sur cercle) » (ici le gros point). Cette transformation nécessite 4 clics.

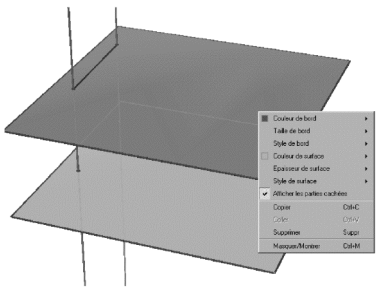


1.3.3.4. Plans et sections planes

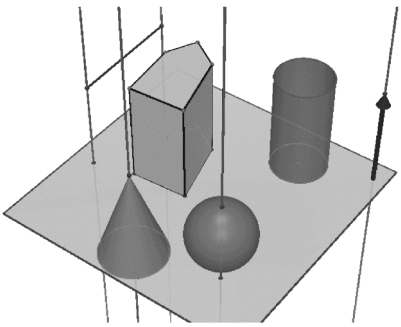
Après avoir créé deux droites verticales, nous avons créé avec l'outil « perpendiculaire » un plan perpendiculaire à l'une de ces droites passant par l'un de ses points.



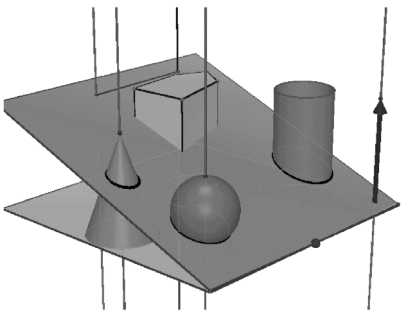
Après avoir créé le second point d'intersection du plan avec la seconde droite et après avoir créé le segment qui les joint, un clic droit sur le plan fait apparaître un menu contextuel. Ce menu contient l'option « masquer-montrer » qui va permettre de cacher le plan créé.



On a construit à droite un cylindre comme produit d'un cercle par un vecteur, un prisme comme produit d'un polygone et d'un vecteur, un cône par un cercle de base et son sommet et une sphère par son centre et l'extrémité d'un rayon. La partie dessinée à gauche des solides peut représenter des poteaux de rugby.



Ici on a construit le plan défini par la barre transversale des poteaux de rugby et un point du plan marqué en gros. On a pu ensuite définir les intersections des solides avec ce plan (à part le prisme où l'intersection est facilement visualisable).



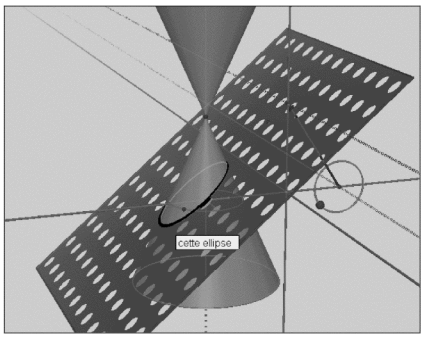
Cette introduction n'a pas la prétention d'être exhaustive, elle a seulement pour objectif une familiarisation rapide avec cet environnement. Beaucoup de fonctionnalités n'ont pas été abordées mais le manque de place ne permet pas de tout

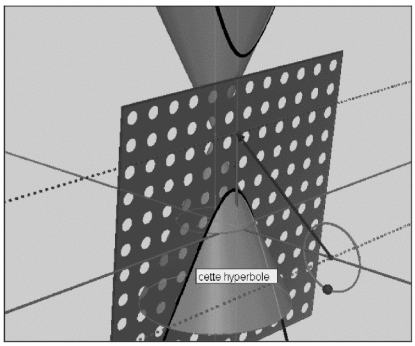
présenter : je pense en pariculier aux animations. Je recommande tout particulièrement les animations ludiques créées par Kate Mackrell de la Queens University de Kingston (Ontario, Canada) avec son petit personnage sphérique « Claude » dont les aventures montrent les potentialités énormes de modélisation de Cabri 3D. À ma connaissance, il n'existe pas de logiciel équivalent sur le marché permettant ces modélisations.

2. Des sections coniques à la fonction carrée

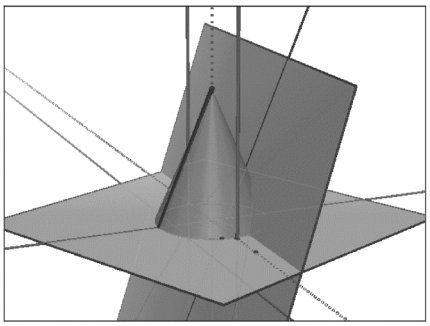
2.1. Pour prendre conscience de la notion de conique

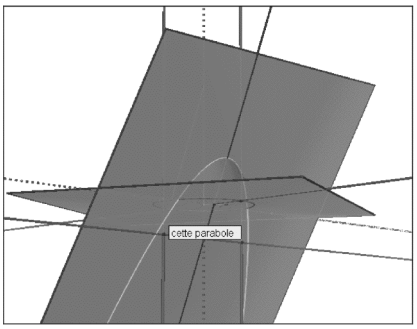
Nous avons construit une figure qui permet de générer l'intersection d'une double nappe conique avec un plan pivotant autour d'une horizontale, pour constater que Cabri reconnaît deux types d'intersection : des ellipses (intersection avec une seule nappe) et des hyperboles (intersection avec deux nappes).





Une autre construction permet de générer l'intersection d'une nappe conique avec un plan parallèle à un plan tangent au cône et dans ce cas là Cabri 3D reconnaît naturellement une parabole :

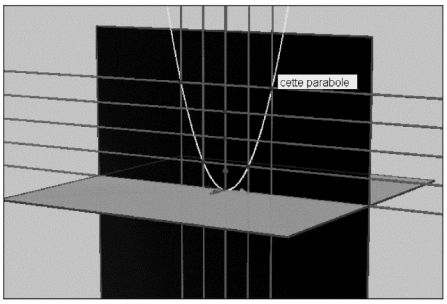




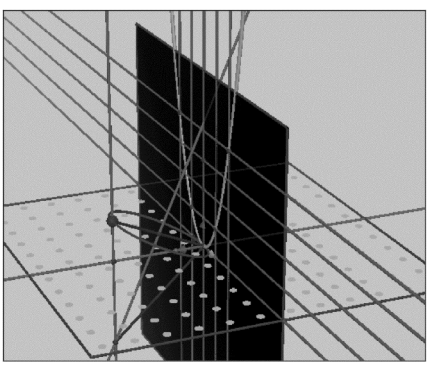
Cette activité monstrative permet de faire prendre conscience très rapidement (en utilisant la caméra qui permet par un clic droit de modifier le point de vue) que ce qui est appelé ellipse, hyperbole ou parabole est un type de courbes issues de la même construction : section d'un cône par un plan.

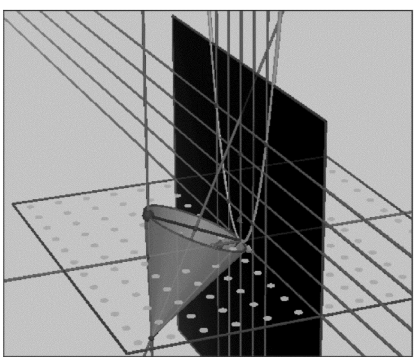
2.2. Pour prendre conscience que la courbe de la fonction carrée est bien une parabole au sens de la définition spatiale

Après avoir quadrillé un plan vertical représentant le plan du tableau, en utilisant vecteurs, translations et symétries, nous avons tracé la conique passant par les cinq points (-2 ; 4), (-1 ; 1), (0 ; 0), (1 ; 1), et (2 ; 4) que Cabri reconnaît comme une parabole

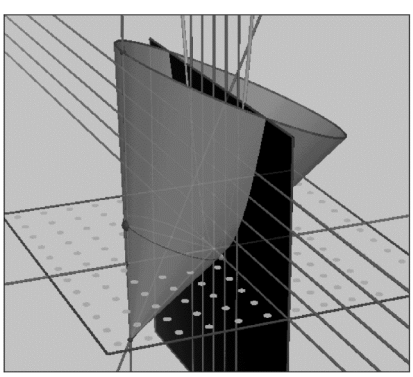


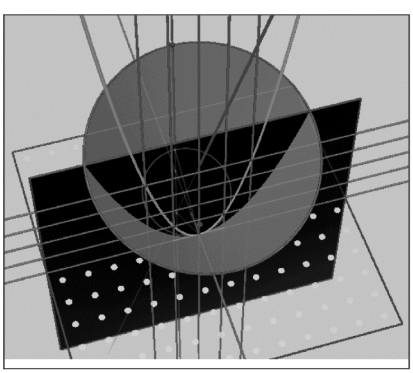
Ce qu'il va être possible de faire maintenant et qui a été fait, c'est de construire un cône dont l'intersection avec le plan du tableau sera justement la courbe représentant notre parabole représentée à partir des mailles du quadrillage.



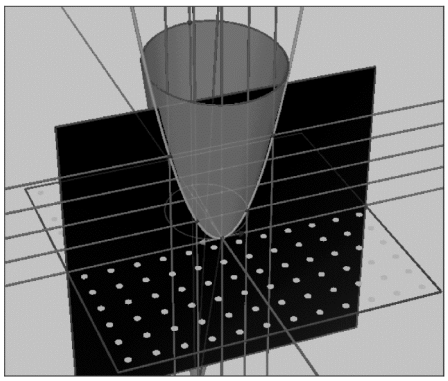


Le gros point qui peut être tiré le long d'une verticale elle-même génératrice du cône cherché est celui qui modifiera l'ouverture de notre cône.
Sur les deux figures qui suivent, on peut constater que le cône coupe le plan du tableau suivant une courbe qu'on peut modifier pour la rapprocher progressivement de la parabole initialement tracée.





Enfin, on atteint une position où la courbe intersection du cône avec le plan du tableau vient se superposer à la courbe représentative de $y = x^2$.

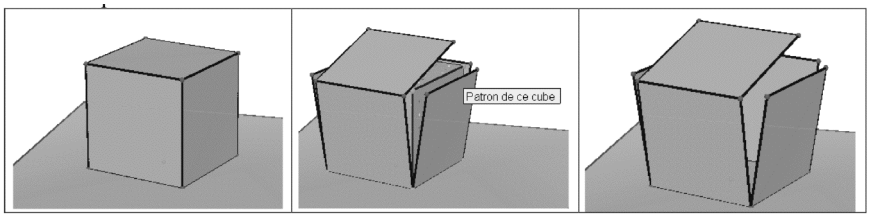


Cette présentation justifie *in fine* le nom de parabole qui est donné à la courbe de la fonction carrée.

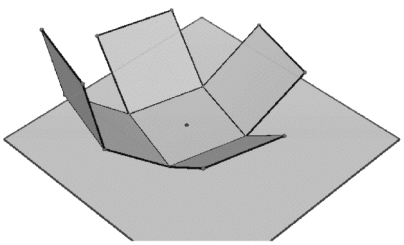
3. Deux façons d'aborder les patrons

3.1. La manière directe

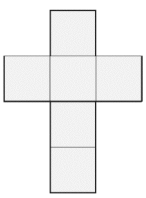
Par un clic sur un cube préalablement construit avec les outils spécifiques de Cabri 3D, on obtient le patron dynamique en utilisant l'outil « Ouverture de polyèdre »



Le patron réalisé peut être ouvert et vu sous tous les angles grâce encore à la caméra.

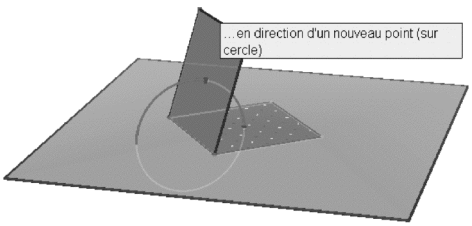


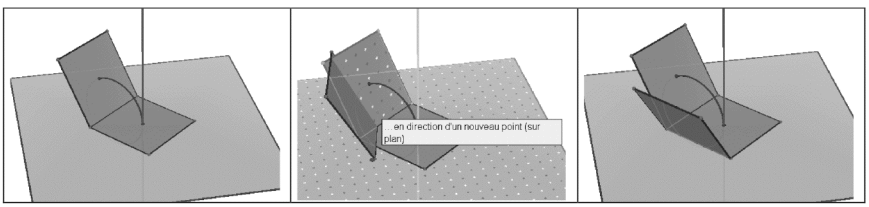
Un clic droit sur le patron fait apparaître un menu contextuel avec la possibilité d'éditer le patron à plat sur le même écran qui est montré ci dessous

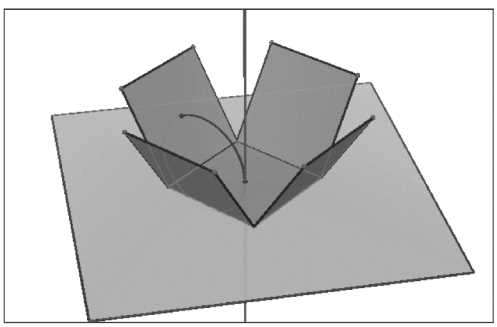


2.2. Une manière dynamique générant des connaissances

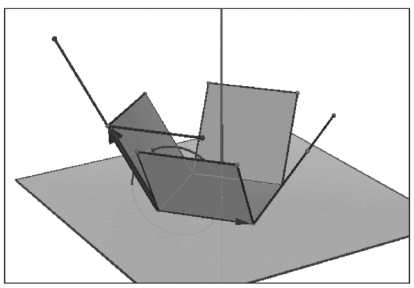
La première face verticale du cube est obtenue par application d'une rotation de la face inférieure autour de l'un de ses côtés. Les autres en appliquant d'abord à la première face verticale une rotation d'axe vertical et d'angle caractérisé par deux sommets consécutifs de la face inférieure et en itérant le procédé. On voit à droite qu'on a appliqué au carré horizontal la rotation autour de l'arête horizontale amenant le centre de ce carré en direction d'un nouveau point sur le cercle préalablement tracé (cercle d'axe le segment horizontal passant par le centre du carré horizontal)

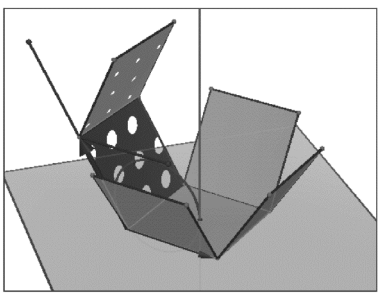




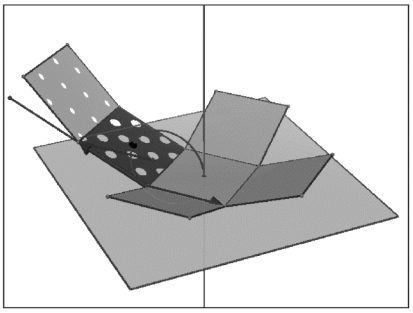
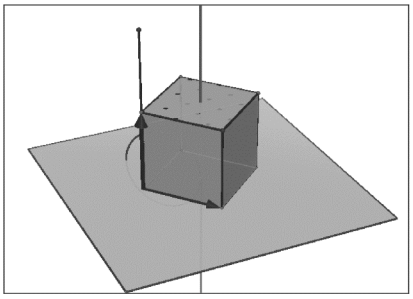


Pour modéliser l'ouverture du couvercle, nous avons créé ce dernier comme l'image de la face à grands trou par une rotation d'angle défini par les deux segments supérieurs qui est le translaté de l'angle des deux vecteurs verts inférieurs.

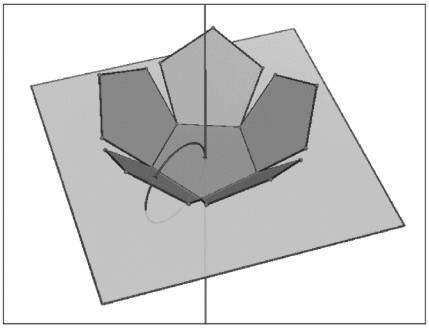
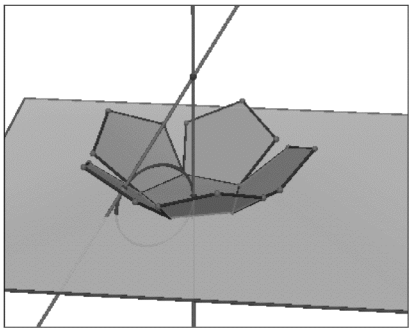




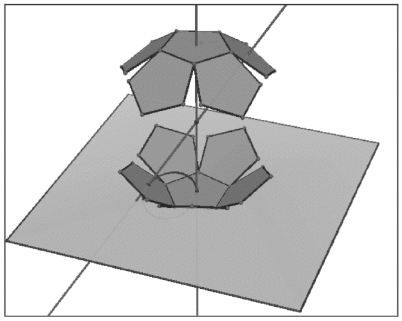
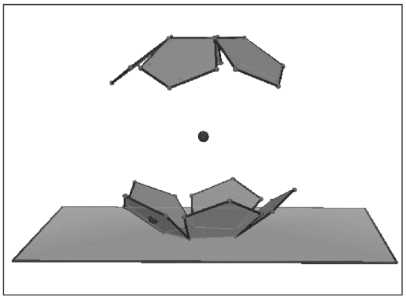
L'ouverture et la fermeture se font en tirant sur le point, centre de la face à grands trous, comme elle se fait avec le patron ouvert par « ouverture de polyèdre ».

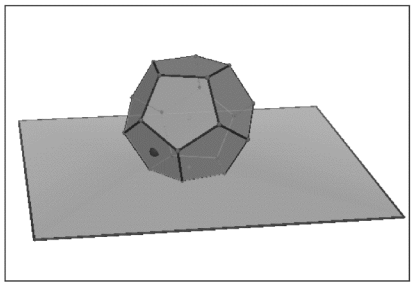
On peut appliquer la même technique en partant d'un pentagone régulier (construction de Schuman).

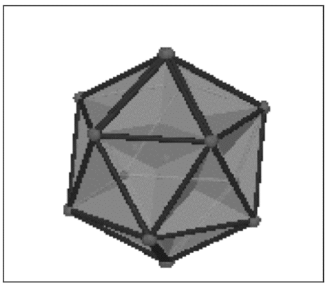



Notons que dans la dernière figure il a été possible de créer un point d'intersection de deux droites qui sont donc des droites qui sont sécantes pour Cabri. Nous sommes là au niveau de que l'on nomme la Cabri preuve (la validation de ce résultat est une validation particulière du domaine de l'informatique). La fin de la construction est réalisée en symétrisant les cinq premiers pentagones par rapport à ce point spécial.

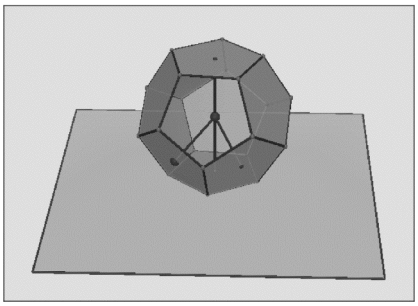



Le dodécaèdre régulier est finalement obtenu en refermant le patron, c'est-à-dire en tirant sur le point pilote initialement placé sur le cercle utilisé.





La deuxième figure ci dessus a été obtenu en continuant de tirer sur le point pilote vers l'intérieur : si au début du mouvement on a l'impression d'un polyèdre qui s'écrase sur lui-même, on finit par obtenir ce magnifique polyèdre étoilé. On comprend ainsi qu'une figure sous Cabri est encore plus spéciale qu'une figure papier-crayon : une telle figure est à la fois toutes les positions particulières permises par la dynamicité du logiciel.
La dernière figure présentée montre l'intérieur du dodécaèdre qui peut être visualisé en vidant l'une des faces.



4. Conclusion

Une approche complètement nouvelle de la géométrie de l'espace est possible avec ce logiciel. Le présent article a une prétention informative : les Professeurs doivent savoir que l'utilisation de cet outil change aussi bien leur appréhension de l'espace que celle de leurs élèves, que les problèmes peuvent être posés de manière plus expérimentale, que de nouveaux problèmes sont générés par cet environnement. Ils peuvent enfin s'appuyer sur une approche ludique qui est plus motivante pour les élèves.

On trouvera des compléments sur les outils de Cabri3D dans le site :
http://www.cabri.com/v2/pages/fr/products_cabri3d_tutorials.php
et les avatars de Claude par Kate Mackrell dans le site :
http://www.chartwellyorke.com/cabri3d/introtocabri3d.htm
Enfin on peut trouver une reproduction de cet article (avec les figures en couleurs) sur le site de l'APMEP.